Обратный для оператора сферической свёртки с логарифмическим ядром

Дроботов Юрий Евгеньевич
yu.e.drobotov@yandex.ru

К докладу на семинаре 31 августа 2020-го года

Пусть R^n, $n \geq 2$, – евклидово пространство векторов размерности n с действительными координатами: $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathrm{R}^n$, где $x_i \in \mathrm{R}$, $i = \overline{1, n}$, так что функция двух переменных

$$|x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + ... + (x_n-y_n)^2}, \quad |x| = |x-0|\,,$$

служит метрикой в R^n, а скалярное произведение определено как $x \cdot y = x_1 y_1 + ... + x_n y_n$.

Легко убедиться, что, в силу тождества параллелограмма,

$$|x-y| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2 - 2\,x \cdot y}. \tag{1}$$

Символом S^{n-1} обозначим единичную сферу в R^n, т.е. $\mathrm{S}^{n-1} := \{x \in \mathrm{R}^n : |x| = 1\}$. Работа рассматривает оператор типа потенциала Рисса

$$\boxed{(I_\theta^\alpha f)(x) = c_\alpha \int\limits_{\mathrm{S}^{n-1}} \frac{\theta(x,\sigma)\, f(\sigma)}{|x-\sigma|^{n-1-\alpha}} d\sigma, \quad x \in \mathrm{S}^{n-1},}$$

где $\alpha - n + 1 \neq 2\,j$, $j \in \mathbb{Z}$, функция $\theta(x, \sigma)$ – характеристика, а c_α – нормировочная постоянная. В силу выражения (1) очевидны условия на характеристику, при которых интегральный оператор I_θ^α принадлежит классу операторов сферической свёртки, общий вид которых есть

$$(K\,f)(x) = \int\limits_{\mathrm{S}^n} k(x \cdot \sigma)\, f(\sigma)\, d\sigma, \quad x \in \mathrm{S}^{n-1},$$

где функция k называется ядром оператора K. В частности, условие $\theta(x, \sigma) \equiv 1$ определяет классический потенциал Рисса на сфере, который обозначим I^α.

В представляемой работе вычисляется мультипликатор оператора I_θ^α при

$$\boxed{\theta(x,\sigma) = \ln \frac{r}{|x-\sigma|}, \quad r > 0,}$$

– последовательность

$$k_m = \frac{2\,\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma((n-1)/2)} \int\limits_{-1}^{1} k(t)\; P_m(t)\left(1-t^2\right)^{\frac{n-3}{2}} dt,$$

собственных значений всякого оператора K в разложении по ортонормированной системе сферических гармоник $Y_{m\mu}(x)$, $x \in \mathrm{S}^n$, где $P_m(t)$ – обобщённые многочлены Лежандра,

$$d(m) = \frac{(n+2m-2)\;(n+m-3)!}{m!\;(n-2)!}, \quad m = 0, 1, 2, ...,$$

в предложении, что прообраз оператора $K\,f(x) = \sum\limits_{m,\mu} k_m f_{m\mu} Y_{m\mu}(x)$ представлен своим разложением по $Y_{m\mu}$:

$$f(x) = \sum_{m,\mu} f_{m\mu} Y_{m\mu}(x), \quad f_{m\mu} = \int\limits_{\mathrm{S}^{n-1}} f(\sigma)\; Y_{m\mu}(\sigma)\, d\sigma.$$

За счёт этого удаётся установить композицию, которую составляет I_θ^α с I^α, и провести обращение оператора I_θ^α в пространствах переменной гёльдеровости, опираясь на результаты работы [1]. Представляемый результат составляет содержание главы [2], недавно опубликованной в составе коллективной монографии по экономике. Представляется, что он и результаты, полученные на его основе, будут интересны в рамках теории интегральных уравнений, задач математической физики и теории сигналов.

Л и т е р а т у р а

1. *Вакулов Б. Г.* Оператор типа потенциала на сфере в обобщенных классах Гёльдера. Изв. вузов. Матем. — 1986.— № 11.—С. 66—69.

2. *Vakulov B. G., Drobotov Yu. E.* Riesz Potential With Logarithmic Kernel in Generalized Hölder Spaces: Theorems on Inversion and Isomorphisms In *Recent Applications of Financial Risk Modelling and Portfolio Management*. IGI Global. 2020. Pp. 275–296. http://doi:10.4018/978-1-7998-5083-0.ch014