Потенциал Рисса с суммируемой плотностью в пространствах переменной гёльдеровости

Дроботов Юрий Евгеньевич
yu.e.drobotov@yandex.ru

К докладу на семинаре 31 июля 2020-го года

Рассматривается потенциал Рисса переменного порядка на гиперсфере $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, метризованной евклидовой метрикой

$$|x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}, \quad |x| = |x - 0|.$$

Данный интегральный оператор имеет вид:

$$\left(I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^{n-1}} f\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-1-\alpha(x)}} dy, \quad x \in \mathbb{S}^{n-1},$$

где функция $\alpha : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям:

$$\forall x \in \mathbb{S}^{n-1} \quad 0 \le \alpha(x) \le 1, \qquad |\{x \in \mathbb{R}^n : \alpha(x) = 0\}| = 0.$$

Исследованы свойства отображения, осуществляемого оператором $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ из пространства L^p измеримых p-суммируемых функций в пространство переменной гёльдеровости $H^{\lambda(\cdot)}$, определение которого для произвольного метрического пространства (Ω, ρ) выглядит, в терминах локального модуля непрерывности

$$M_\rho(f, x, t) := \sup_{y \in \Omega : \rho(x,y) \le t} |f(x) - f(y)|, \quad t > 0, \quad x \in \Omega,$$

следующим образом:

$$\forall x \in \Omega, \quad t < 1 \qquad M_\rho(f, x, t) \le C t^{\lambda(x)}, \qquad 0 < C < \infty.$$

Символом $\mathrm{Lip}(\Omega)$ обозначено пространство функций f, удовлетворяющих на Ω условию Липшица.

Основной результат работы составляет

Теорема 1. *Пусть $n \ge 3$, $1 < p < \infty$ и выполнены следующие условия:*

(a) $\alpha \in \mathrm{Lip}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$; (b) $\inf\limits_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \alpha(x) > (n-1)/p$; (c) $\sup\limits_{x \in \mathbb{S}^{n-1}} \alpha(x) < (n-1)/p + 1$.

Тогда оператор $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ ограничен из $L^p\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$ в $H^{\lambda(\cdot)}\left(\mathbb{S}^{n-1}\right)$, где $\lambda(x) = \alpha(x) - (n-1)/p$.

С использованием Теоремы 1 доказывается результат об ограниченности отображения оператором $I^{\alpha(\cdot)}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1}}$ типа потенциала Рисса переменного порядка на одноточечной компактификации гиперплоскости пространства $\mathbb{R}^n$ функции из L^p в пространство $H^{\lambda(\cdot)}(w_0) := \left\{f : w_0 f \in H^{\lambda(\cdot)}\right\}$ с весом w_0 специального вида.

Настоящей работе предшествовало исследование [1] для постоянного показателя α, и здесь преследуется цель подтвердить установленный в [1] вид $\lambda(x)$ в формулировке основного результата. Стоит отметить, что в случае постоянного α потенциал Рисса на сфере представляет собой оператор сферической свёртки, и для его исследования успешно применяется подход, использующий понятие о мультипликаторе Фурье–Лапласа [2]. Однако он теряет свою силу в случае переменного $\alpha(x)$, что предполагает использование более тонких оценок для исследования гёльдеровости образа. Отображение, осуществляемое $I^{\alpha(\cdot)}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ между пространствами обобщённой переменной гёльдеровости (являющимися надмножествами рассматриваемых здесь $H^{\lambda(\cdot)}$) было изучено в [3], а соответствующие результаты об ограниченности $I^{\alpha(\cdot)}_{\dot{\mathbb{R}}^{n-1}}$ – доказаны в [4].

Результаты представляемого исследования составляют содержание одноимённой докладу статьи для журнала „Математические заметки“, успешно прошедшей рецензирование на момент заседания.

Л и т е р а т у р а

1. *Вакулов Б. Г.* Теоремы типа Харди–Литтлвуда–Соболева об операторах типа потенциала в $L_p(S_{n-1}, \rho)$. Деп. в ВИНИТИ 25.07.1986, №5435–V 86. 1986.

2. *Vakulov B. G., Kostetskaya G. S., Drobotov Yu. E.* Riesz potentials in generalized Hölder spaces. In *Fractal Approaches for Modeling Financial Assets and Predicting Crises.* IGI Global. 2018. Pp. 249–273. `http://doi:10.4018/978-1-5225-3767-0.ch013`

3. *Samko N., Vakulov B. G.* Spherical fractional and hypersingular integrals of varialbe order in generalized Hölder spaces with variable characteristic. Math. Nachr., Vol. 284, pp. 355–369. `https://doi.org/10.1002/mana.200810113`

4. *Вакулов Б. Г., Дроботов Ю. Е.* Оператор типа потенциала переменного порядка по $\dot{\mathbb{R}}^n$ в весовых пространствах обобщённой переменной гёльдеровости. Сибирские электронные математические известия. Том. 14, стр. 647–656. `https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.056`