

2. Анализ напряженно-деформированного состояния выступающего элемента строительной конструкции

Для исследования вопроса о том, какую опасность для выступающих частей зданий представляют колебания их оснований, и каковы параметры этих опасных колебаний, был выполнен анализ напряженно-деформированного состояния выступающего элемента строительной конструкции. Учитывая то, что результаты теоретического изучения предполагалось проверить в прямом натурном эксперименте, анализу подвергали численную модель, полностью соответствующую натурной модели. Эта модель представляла собой укороченную балконную железобетонную плиту с размерами, приведенными на рисунке 2.1.

Определение приведенной плотности материала плиты

Обозначим через F площадь поперечного сечения, F_1 - площадь, занимаемую бетоном, F_2 - площадь сечения стальных арматурных прутьев, ρ_1, ρ_2 - плотности бетона и стали соответственно. Приведенная плотность ρ_* вычисляется из соотношения

$$\rho_* F = \rho_1 F_1 + \rho_2 F_2 \quad (2.1)$$

Для заданных размеров сечения получим

$$\rho_* = \frac{\rho_1 (bh - n\pi R^2) + \rho_2 n\pi R^2}{bh} = 2,19 \cdot 10^3 \text{ (кг/м}^3\text{)} \quad (2.2)$$

где b, h, R, n ширина и высота сечения, радиус и число прутьев соответственно.

Определение приведенного модуля Юнга

Для расчета приведенного модуля Юнга определим положение главных осей, при этом примем гипотезу плоских сечений и вычислим суммарную продольную силу в сечении, которая при вертикальном внешнем воздействии равна нулю

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF = \frac{1}{\rho} (E_1 \int_{F_1} y dF + E_2 \int_{F_2} y dF) = \\ &= \frac{1}{\rho} (E_1 \int_F y dF + (E_2 - E_1) \int_{F_2} y dF) = 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где σ, ρ, E_1, E_2 - нормальные напряжения, кривизна нейтральной линии, модули упругости бетона и стали соответственно. Из соотношения (2.3) получаем уравнение для нахождения a - смещения начала координат главных осей относительно центра тяжести сечения.

$$a = \frac{(E_2 - E_1) n \pi R^2 (h/2 - h_1)}{bhE_1 + (E_2 - E_1) n \pi R^2} = 0,78 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} \quad (2.4)$$

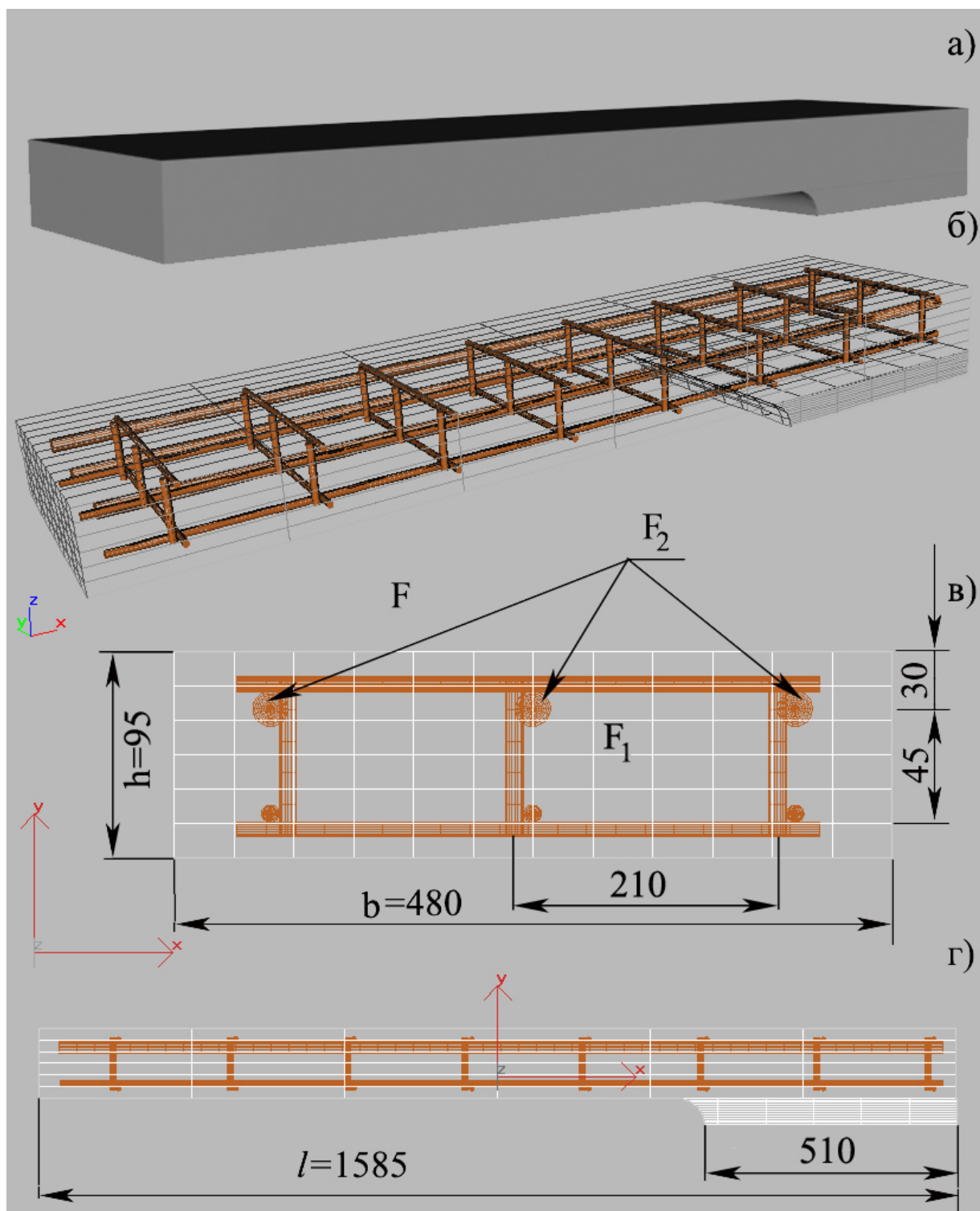


Рис.2.1. Натурная модель балконной плиты, использованная в экспериментах и численных расчетах
 а) общий вид;
 б) схема раскладки арматуры;
 в) поперечное сечение;
 г) продольное сечение

Приведенный модуль Юнга E найдем из соотношения

$$\int_F \sigma y dF = \frac{1}{\rho} (E_1 \int_F y^2 dF + (E_2 - E_1) \int_{F_2} y^2 dF) = \frac{1}{\rho} EJ_X \quad (2.5)$$

где J_X момент инерции сечения относительно главной центральной оси.

$$E = \frac{1}{J_X} (E_1 (J_X + bha^2) + (E_2 - E_1) (nJ_{cX} + n\pi R^2 (h/2 - h_1 - a)^2)) = 2,04 \cdot 10^{10} \text{ (Н/м}^2\text{)} \quad (2.6)$$

Расчет статического прогиба, сравнение с МКЭ.

Рассмотрим консольную балку с прямоугольным сечением, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой $q = 1000 \text{ н/м}^2$. Прогиб свободного конца балки находится из решения краевой задачи [2]

$$EJ_X y^{(4)} = qb \quad (2.7)$$

$$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(l) = 0, y'''(l) = 0 \quad (2.8)$$

При этом прогиб свободного конца балки находится по формуле

$$y(l) = \frac{qbl^4}{EJ_X} (1/24 - 1/6 + 1/4) = 0,1147 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} \quad (2.9)$$

Расчет двумерной и трехмерной конструкции при тех же условиях нагружения проведен методом конечного элемента с помощью КЭ комплекса ACELAN и FlexPDE.

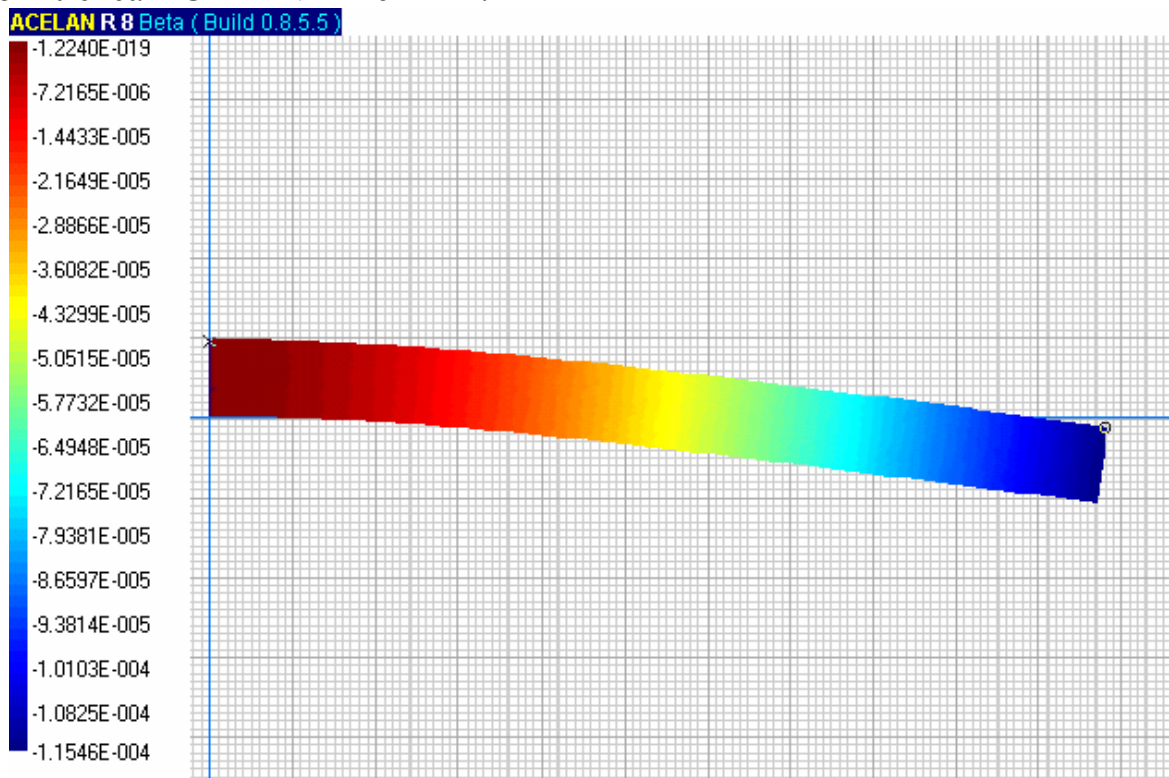


Рис. 2.2. Распределение вертикальных смещений консольно закрепленной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = 1000 \text{ н/м}^2$

На рис.2.2 совмещены изображения деформированного состояния конструкции и распределение вертикальных смещений, при этом смещение на границе $z = l$ равно $0,1155 \cdot 10^{-3}$ м, и погрешность формулы (2.9) составляет менее 1%.

Результаты расчета для трехмерной конструкции приведены на рис. 2.2а, 2.2б. На рис.2.2а представлено деформированное состояние конструкции. На рис. 2.2б - распределение смещений u_x в среднем по ширине сечения. При этом смещение u_x точек на поверхности $z = l$ равно $0,115 \cdot 10^{-3}$ м, а погрешность формулы (2.9) составляет 1%.

Модальный анализ, сравнение с МКЭ

Определим собственные частоты изгибных колебаний консольной балки. Уравнение свободных поперечных колебаний имеет вид [3]

$$EJ_x \frac{\partial^4}{\partial z^4} y + \rho F \ddot{y} = 0 \quad (2.10)$$

краевые условия (2.8) определяют частотный спектр, задаваемый соотношением

$$f_k = \frac{\lambda_k^2}{2\pi l^2} \sqrt{\frac{EJ_x}{\rho_* F}}, \quad (2.11)$$

где λ_k корни трансцендентного уравнения

$$\cosh \lambda \cos \lambda + 1 = 0 \quad (2.12)$$

наименьший действительный корень уравнения (2.12) равен 1,875, поэтому первая собственная частота

$$f_1 = 40,50 \text{ Гц} \quad (2.13)$$

остальные частоты достаточно точно находятся из асимптотической формулы

$$\lambda_k = \pi/2 + k\pi \quad (2.14)$$

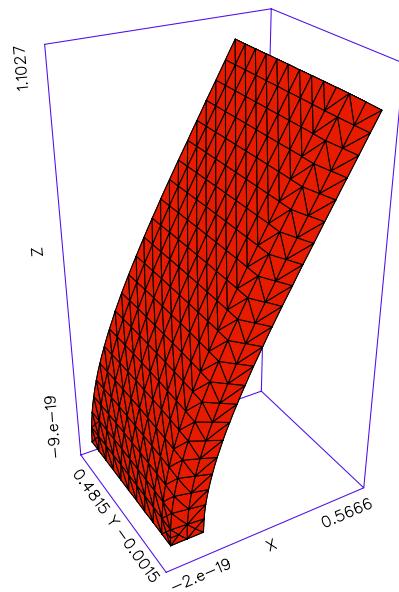
Это обстоятельство наглядно демонстрируется рис. 2.3, на котором верхняя кривая соответствует уравнению (2.12).

Расчет собственных частот по двумерной теории с помощью КЭ комплекса ACELAN уточняет значение первой частоты на 0,5%

$$f_1 = 40,30 \text{ Гц} \quad (2.13)$$

Погрешность в нахождении второй и третьей собственной частоты изгибных мод колебаний по балочной теории составляют 5% и 9% соответственно.

Bimetal Part

12:55:41 12/15/103
FlexPDE 2.14aShape
(-0.51,-1.12, 30.0)

3D_BALKON_HOMOG: Grid#3 p2 Nodes=4740 Cells=2624 RMS Err= 8.9e-6

Рис.2.2а. Деформированное состояние трехмерной конструкции нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = 1000 \text{ н/м}^2$

Bimetal Part

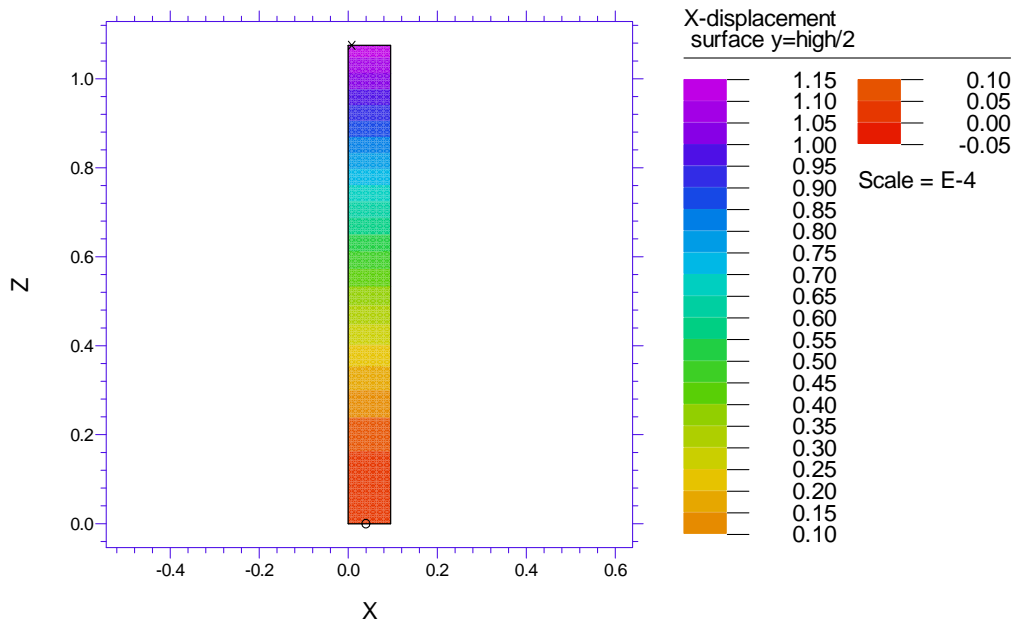
12:55:41 12/15/103
FlexPDE 2.14a3D_BALKON_HOMOG: Grid#3 p2 Nodes=4740 Cells=2624 RMS Err= 8.9e-6
Integral= 4.674794e-6

Рис. 2.2б - распределение смещений u_x в среднем по ширине сечения балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой $q = 1000 \text{ н/м}^2$.

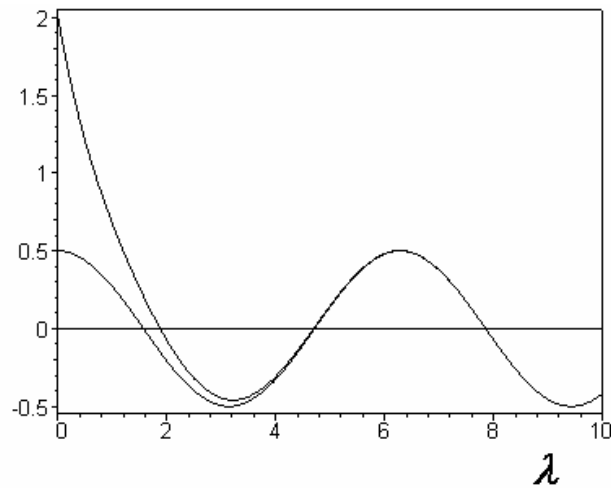


Рис. 2.3. К определению корней уравнения (2.12)

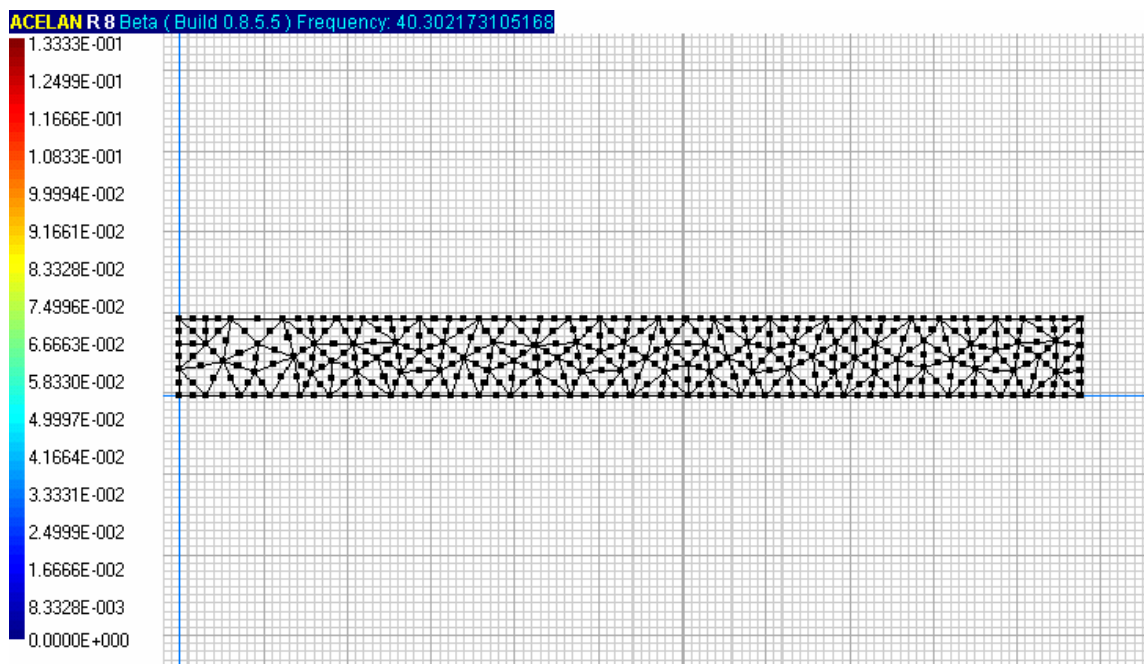


Рис.2.4 Конечно-элементная сетка модели для расчета собственных частот по двумерной теории с помощью КЭ комплекса ACELAN.

Аналогичный расчет, проведенный для трехмерной конструкции во FlexPDE показал, что первая собственная частота соответствует первой изгибной моде колебаний (рис. 2.5а) и равна $f_1 = 40,59$ Гц.

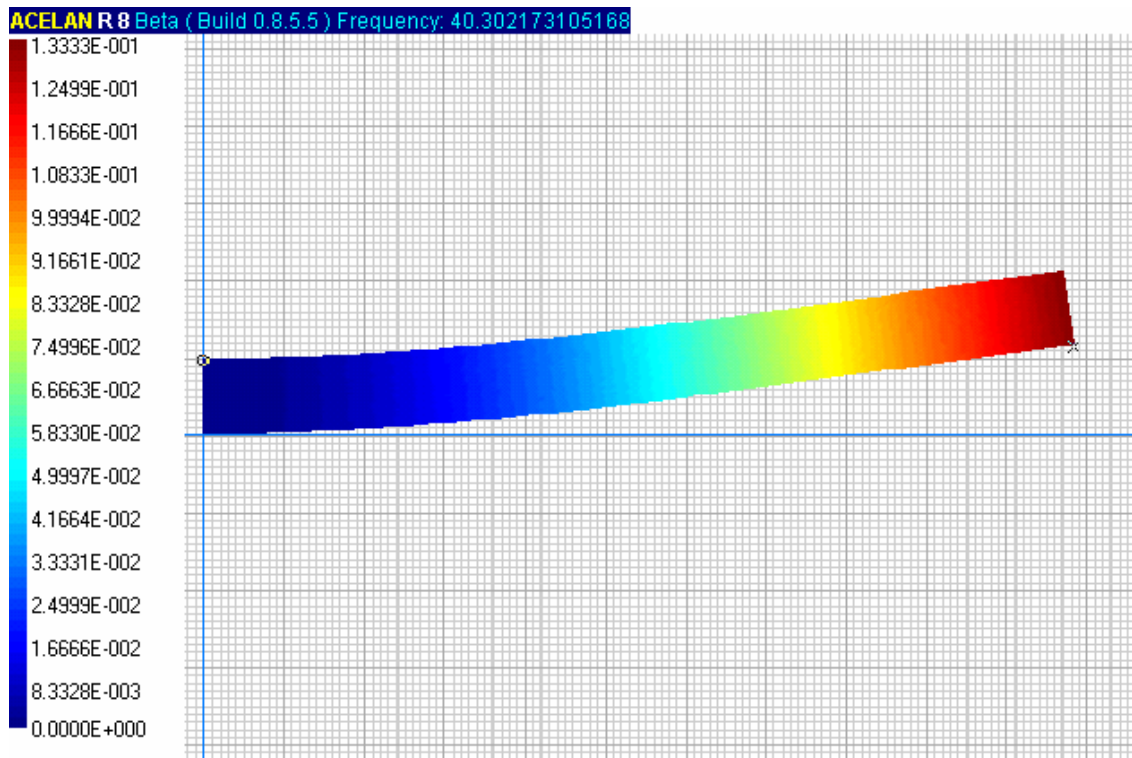
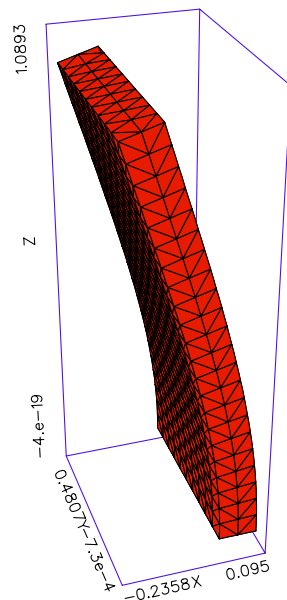


Рис.2.5 Распределение вертикального смещения на первой моде колебаний

Bimetal Part

13:25:01 12/15/103
FlexPDE 2.14a



Shape
(-0.51,-1.12, 30.0)

3D_BALKON_HOMOG_EIG: Grid#1 p2 Nodes=4545 Cells=2508 RMS Err= 8.9e-6
Mode 1 Lambda= 65054. Frequency in Hz= 40.59364

Рис. 2.5а

Вторая собственная частота соответствует первой изгибной моде в горизонтальной плоскости (рис. 2.5б) и равна $f_2 = 181,3$ Гц.

Bimetal Part

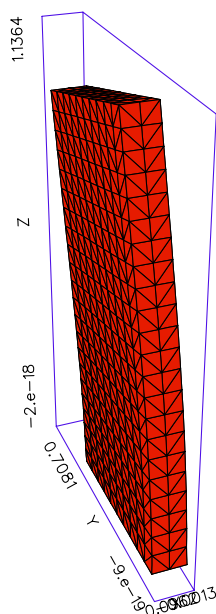
13:25:01 12/15/103
FlexPDE 2.14aShape
(-0.51,-1.12, 30.0)3D_BALKON_HOMOG_EIG: Grid#1 p2 Nodes=4545 Cells=2508 RMS Err= 8.9e-6
Mode 2 Lambda= 1.2982e+6 Frequency in Hz= 181.3359

Рис. 2.5б. Первая изгибная мода колебаний в горизонтальной плоскости

Третья собственная частота соответствует первой моде кручения (рис.2.5в) и равна $f_3 = 185,6$ Гц

Bimetal Part

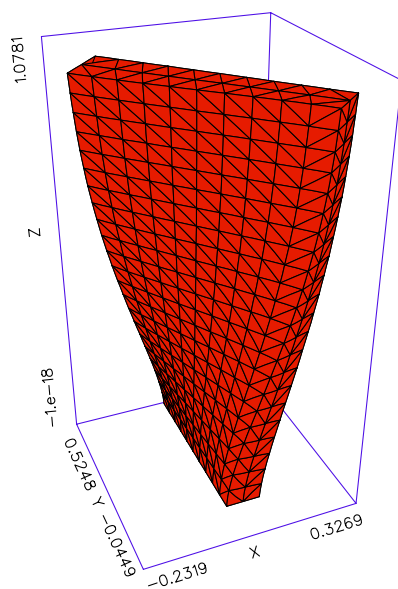
13:25:01 12/15/103
FlexPDE 2.14aShape
(-0.56,-1.23, 30.0)3D_BALKON_HOMOG_EIG: Grid#1 p2 Nodes=4545 Cells=2508 RMS Err= 8.9e-6
Mode 3 Lambda= 1.3593e+6 Frequency in Hz= 185.5551

Рис. 2.5в.

Таким образом, по балочной или по двумерной теории возможен гармонический анализ колебаний конструкции в районе первой собственной частоты (в диапазоне $[0, 100\text{Гц}]$), соответствующая форма колебаний является первой изгибной модой. Что касается следующих мод, то соответствующие им частоты значительно превосходят измеренные и представленные в разделе 1 частоты внешних возбуждений. С учетом того, что анализируемая модельная конструкция имеет меньшую жесткость в направлениях деформирования, соответствующих старшим модам колебаний, чем натурные конструкции, можно утверждать, что для натуральных конструкций балочное или двумерное приближение являются весьма реалистичными, во всяком случае, при отсутствии дополнительной загрузки присоединенными массами и вдали от собственных частот старших мод.

Гармонический анализ

Гармонический анализ свободной конструкции, когда заделка совершает установившиеся колебания с амплитудой $0,01\text{м}$, проводился в ACELAN. В связи с тем, что приведенные ниже результаты получены с использованием линейной теории, они легко приводятся к натурным значениям с использованием данных раздела 1.

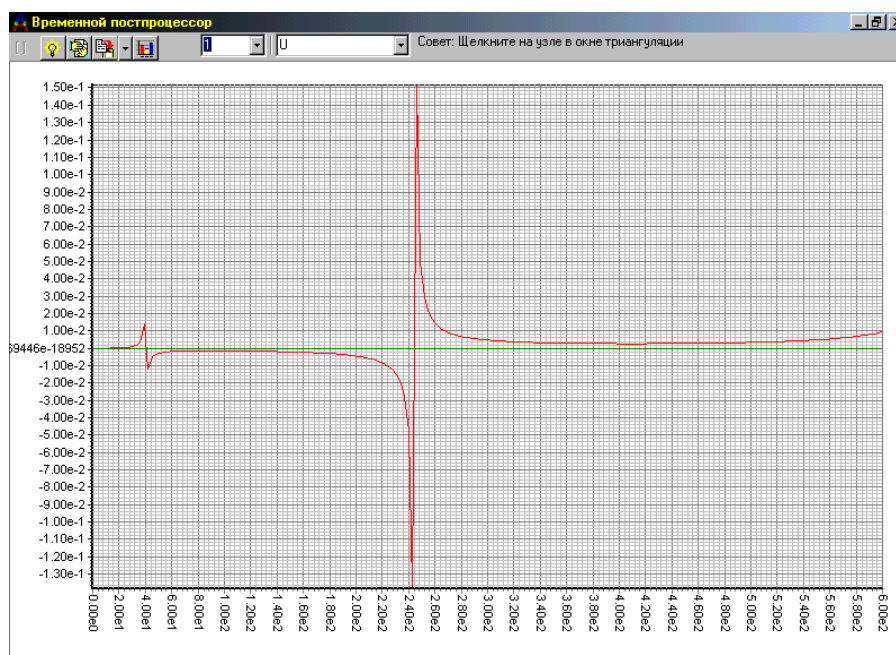


Рис. 2.6. АЧХ горизонтального смещения свободного конца балки.

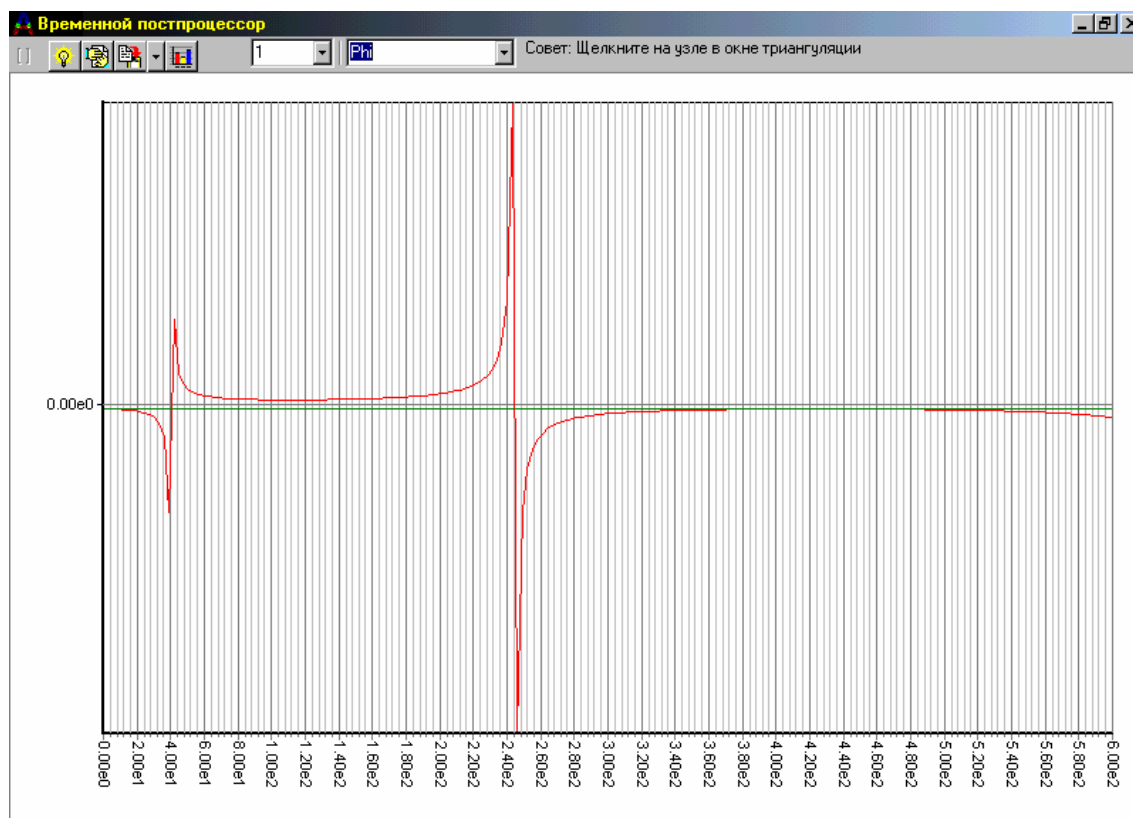


Рис. 2.7. АЧХ вертикального смещения свободного конца балки (зеленым цветом отмечена амплитуда заделки).

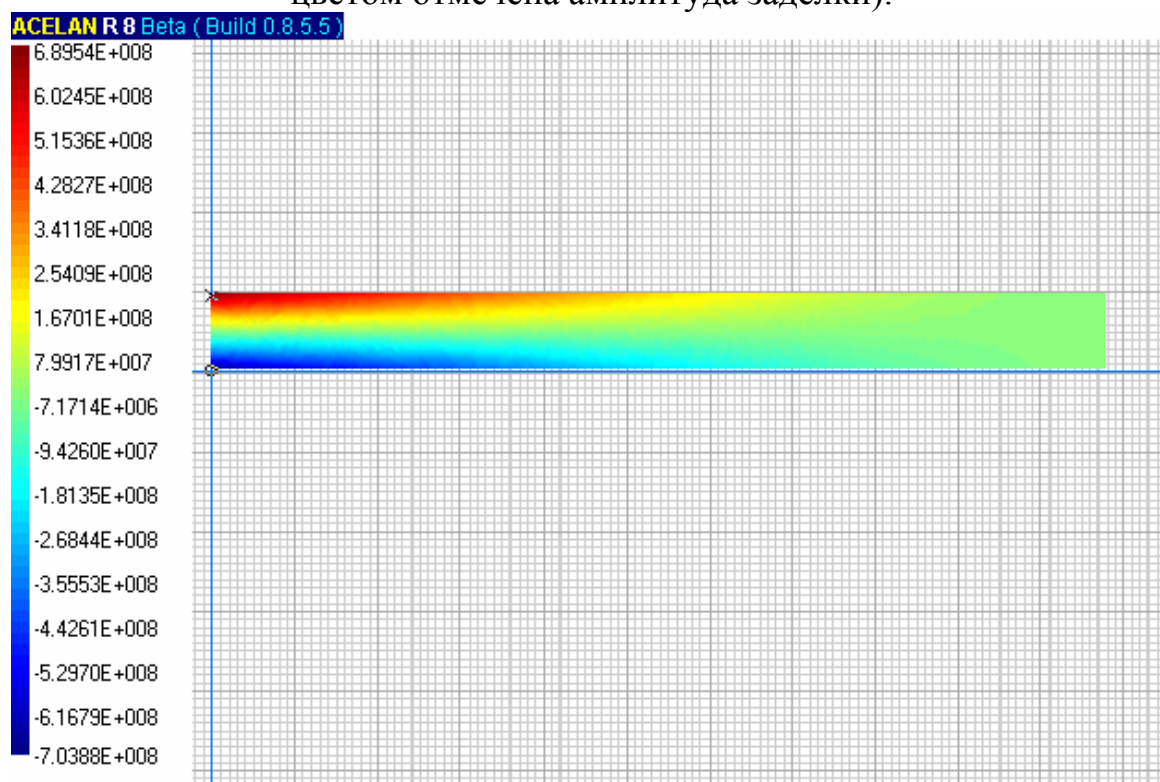


Рис. 2.8. Распределение нормальных горизонтальных напряжений вблизи первого резонанса

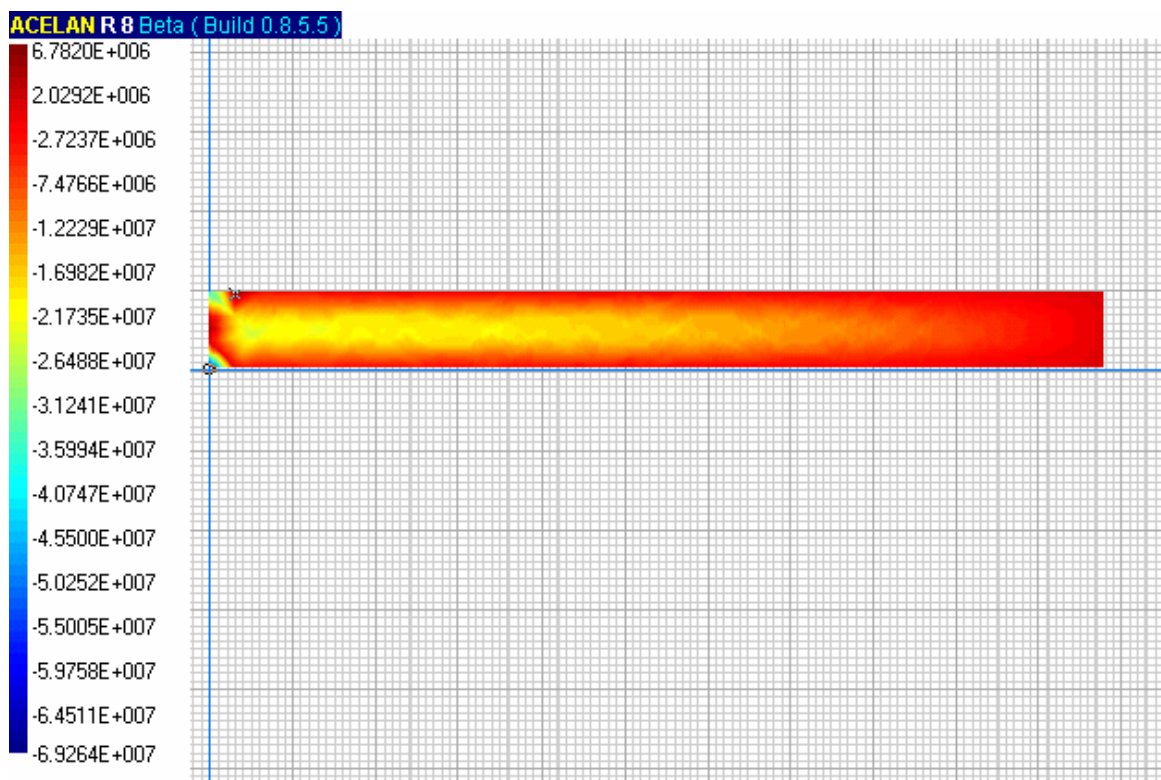


Рис. 2.9. Распределение касательных напряжений вблизи первого резонанса

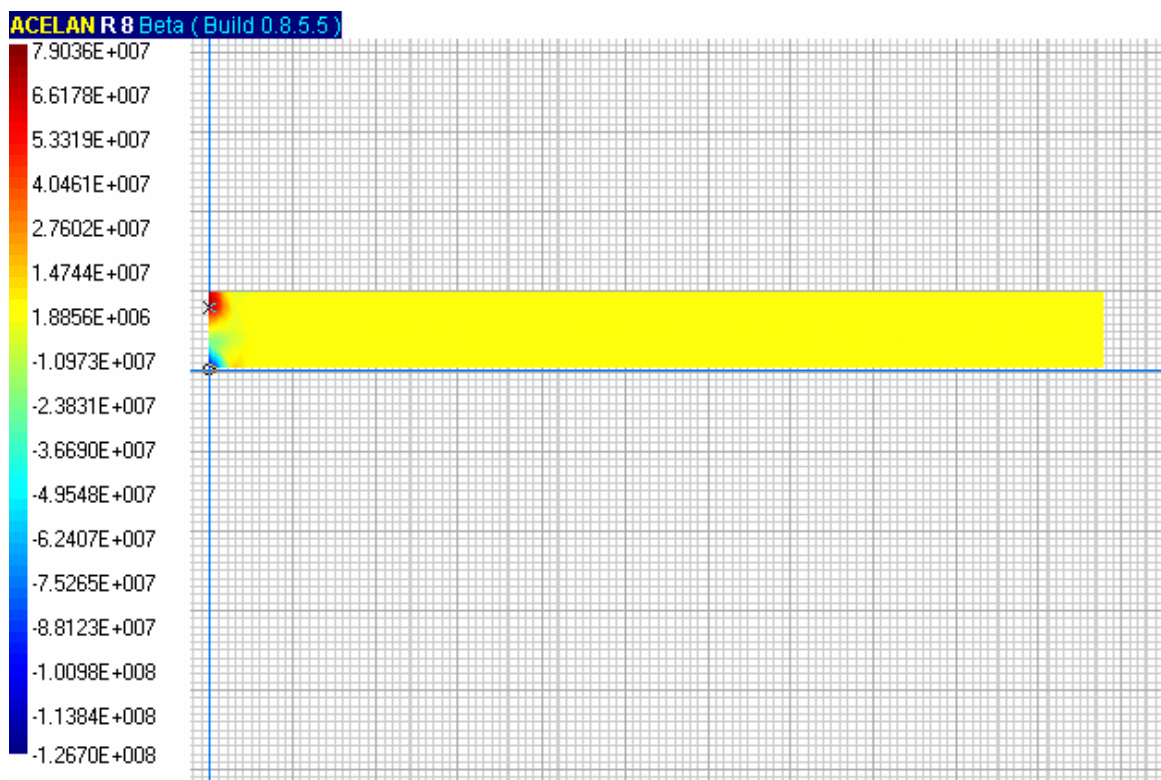


Рис. 2.10. Распределение нормальных вертикальных напряжений вблизи первого резонанса

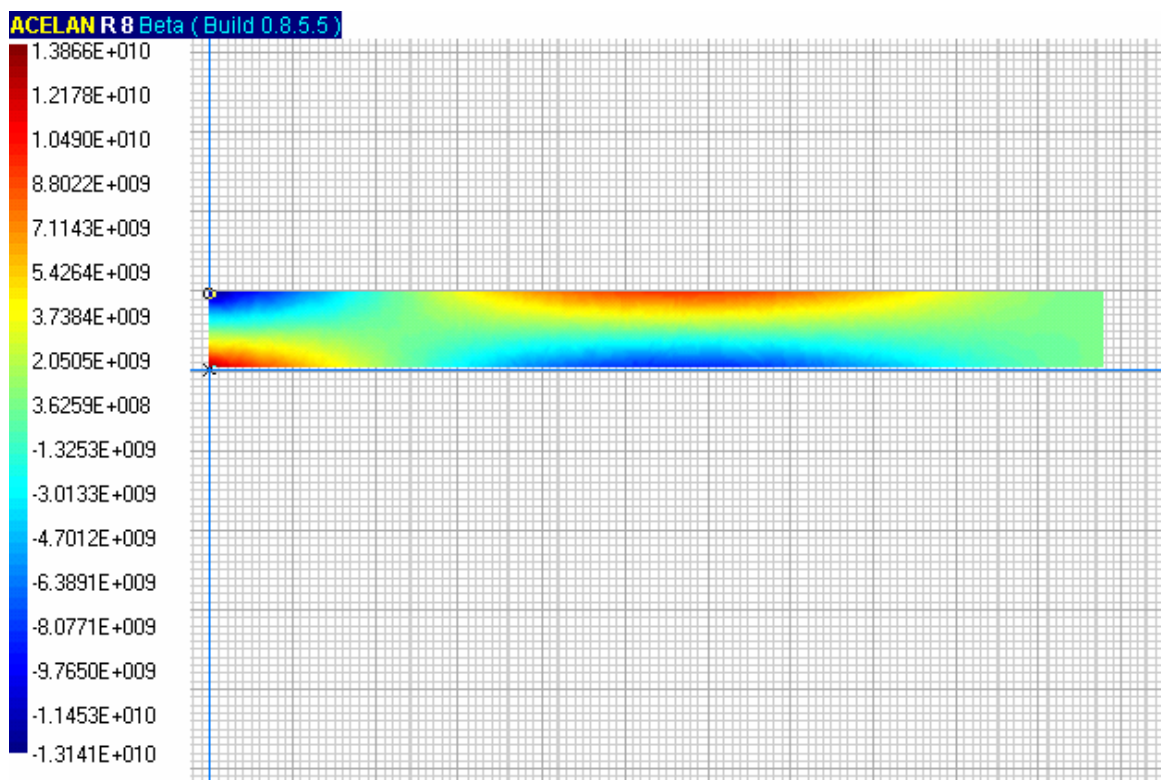


Рис. 2.11. Распределение нормальных горизонтальных напряжений вблизи второго резонанса

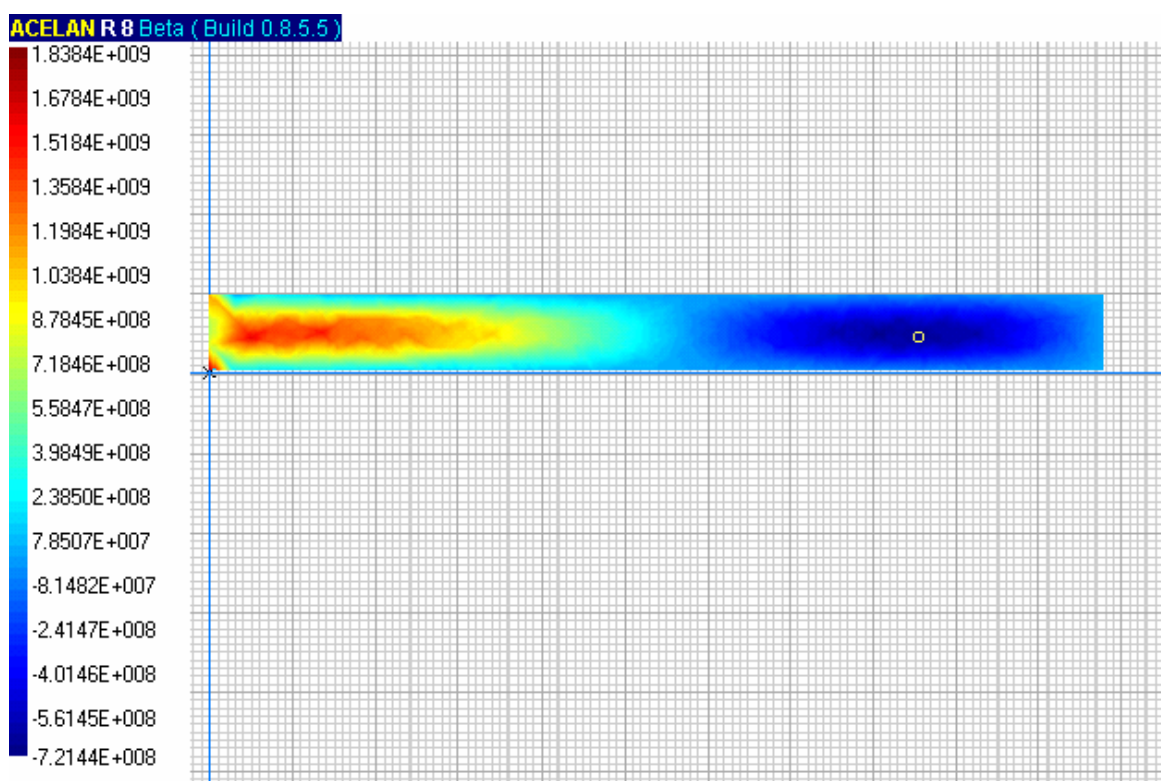


Рис. 2.12. Распределение касательных напряжений вблизи второго резонанса

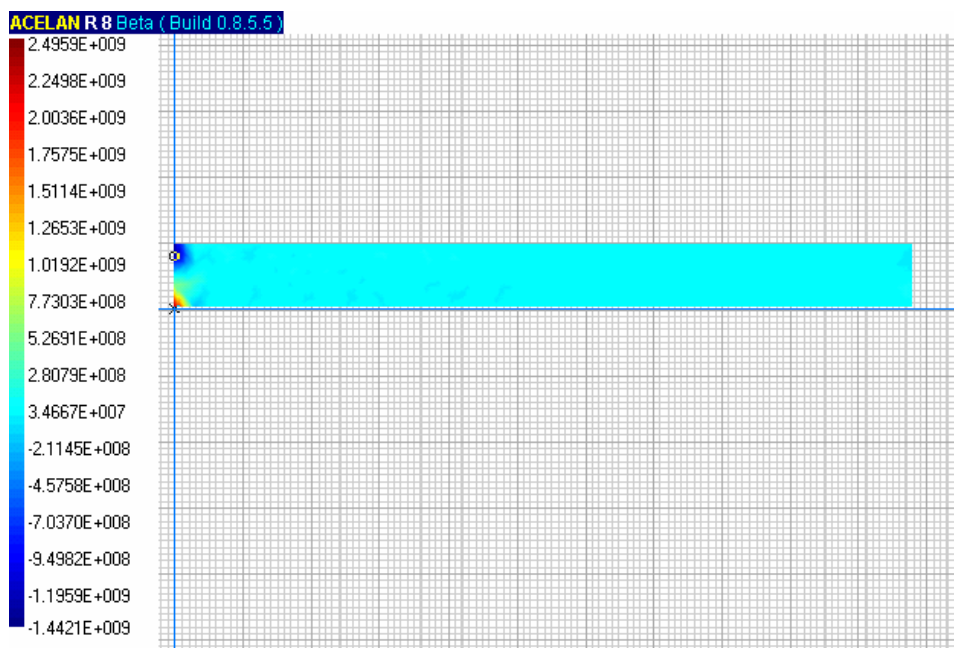


Рис. 2.13. Распределение нормальных вертикальных напряжений вблизи второго резонанса

Расчет конструкции с присоединенным грузом

Расчет конструкции с прикрепленным грузом массой 37,7 кг, расположенным на расстоянии 0,7 м от закрепленного конца проводился в ACELAN. В этом случае первые три собственные частоты изгибных мод представлены на рис.2.14.

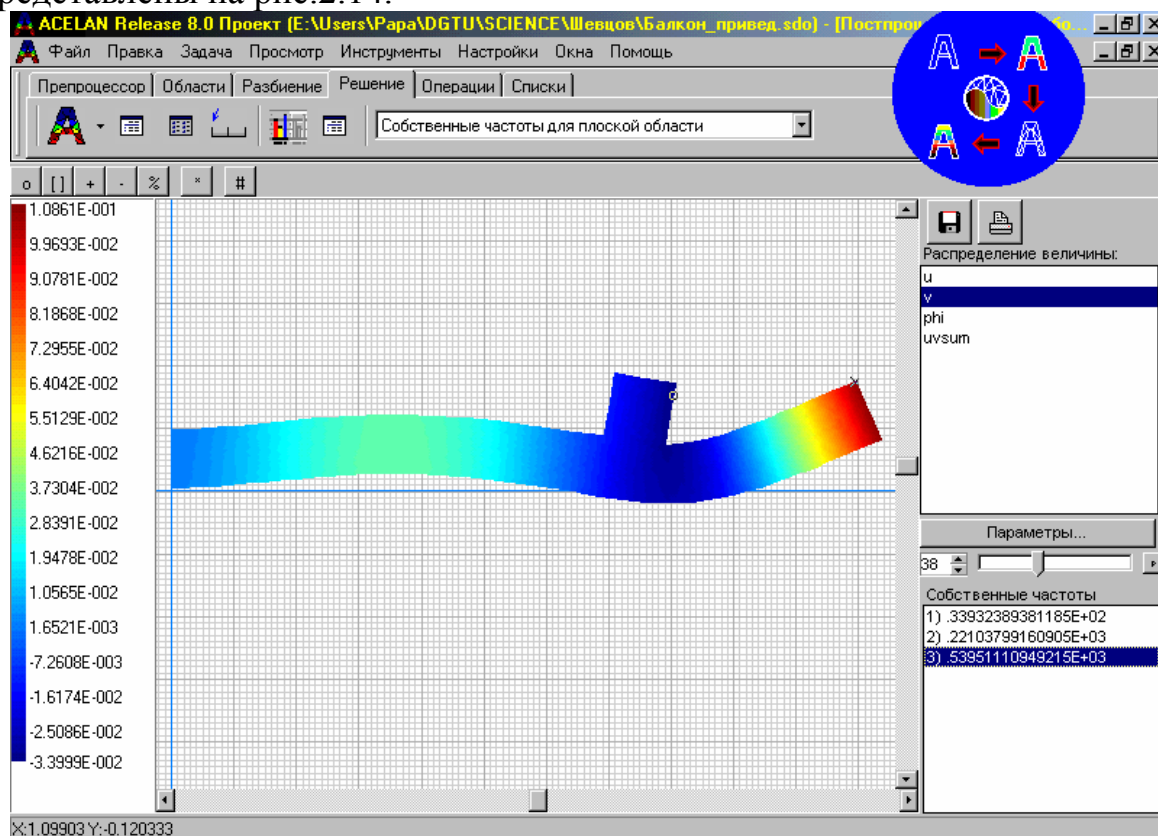


Рис. 2.14. Screenshot окна результатов расчета собственных частот в ACELAN

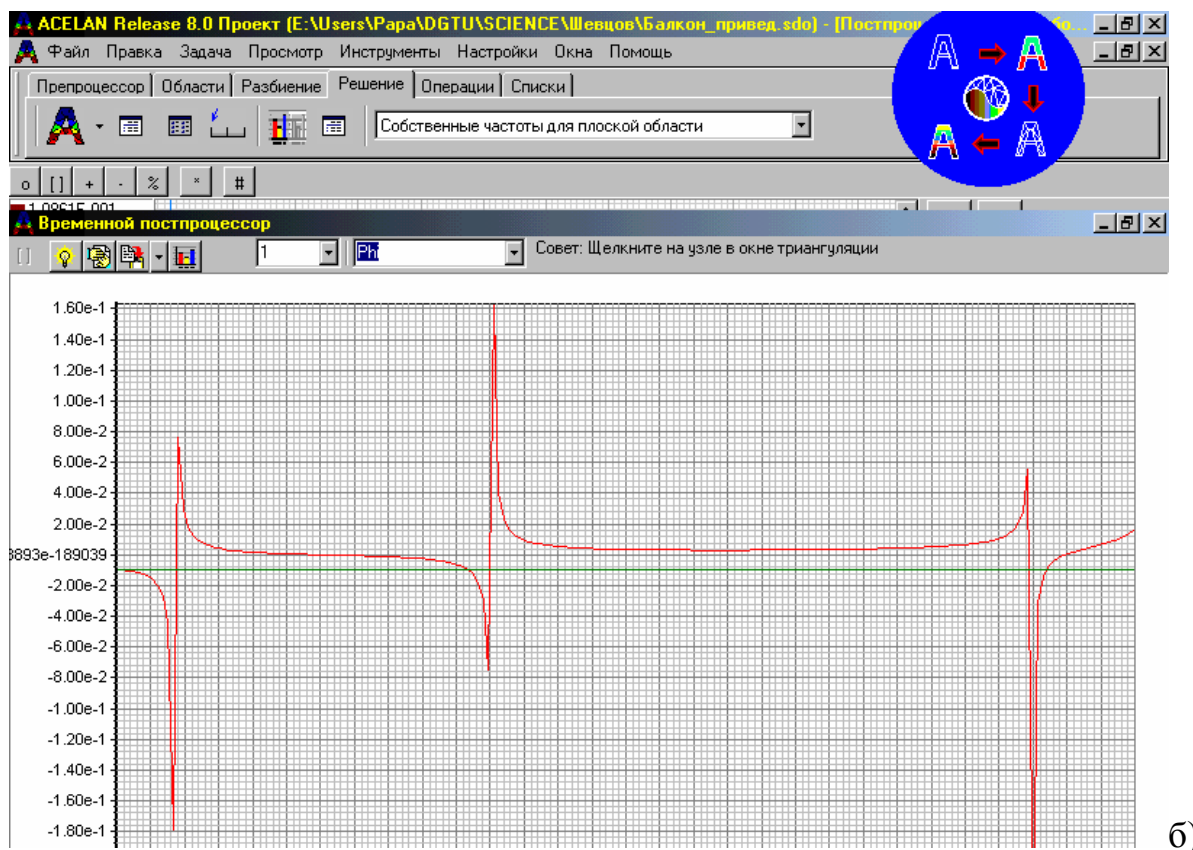
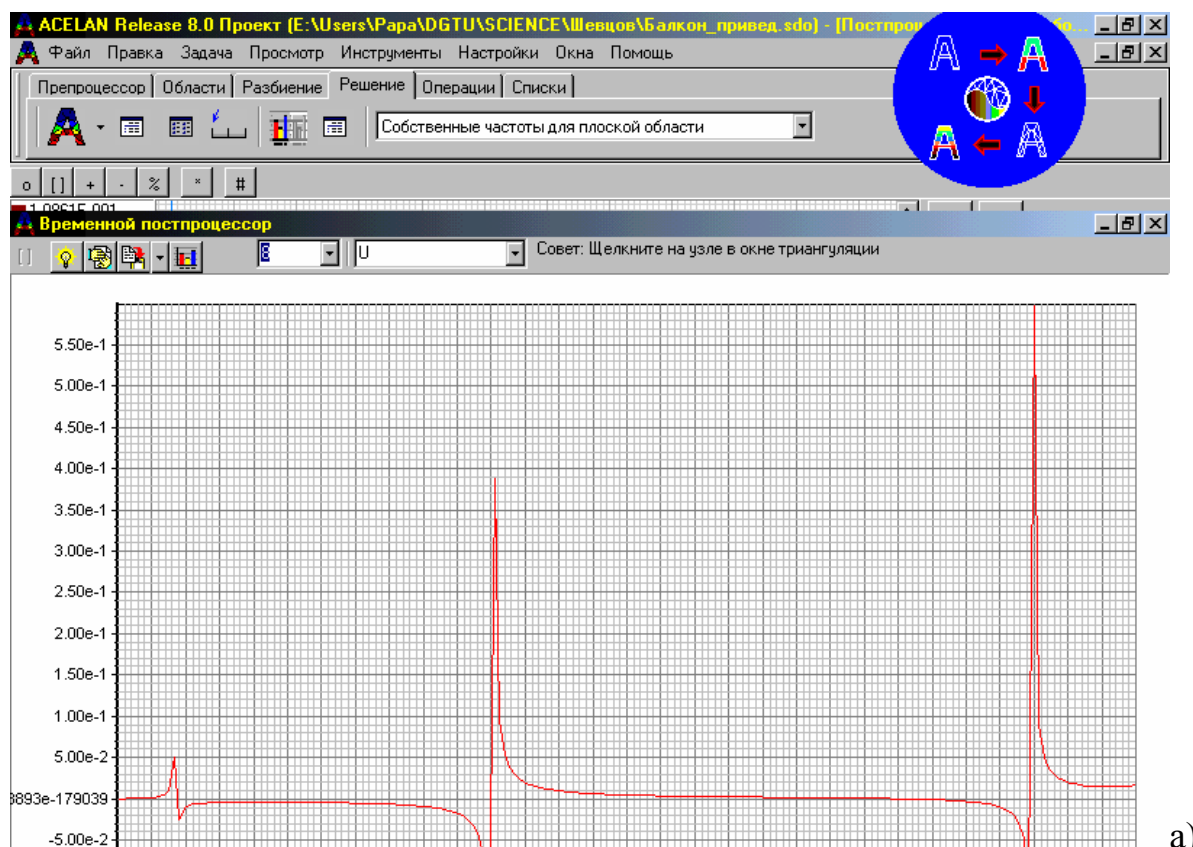


Рис. 2.15. АЧХ горизонтального (а) и вертикального (б) смещения верхней точки груза.

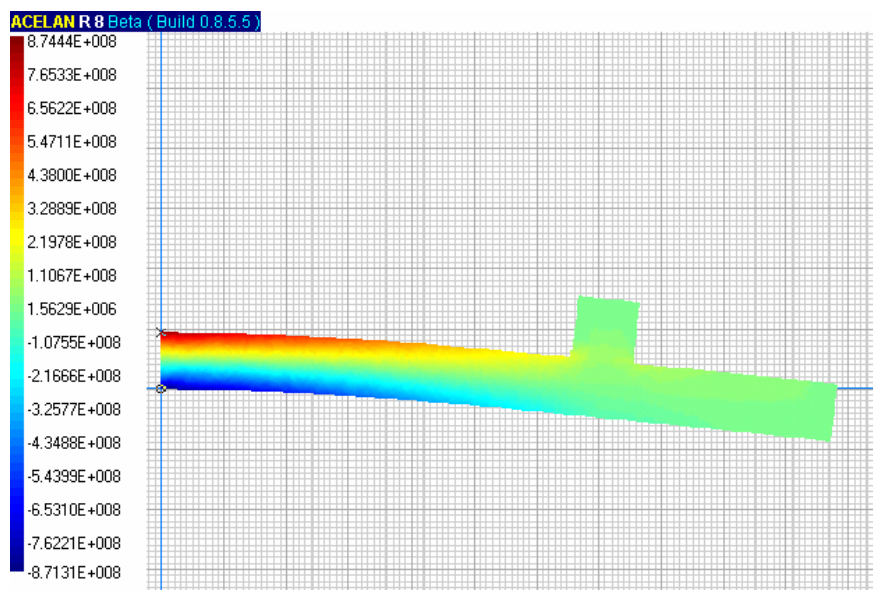


Рис. 2.16.

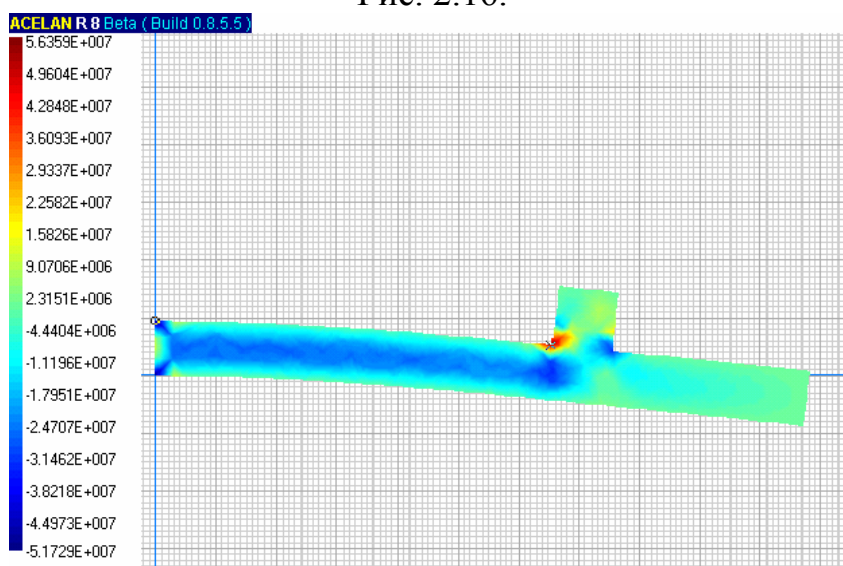


Рис. 2.17.

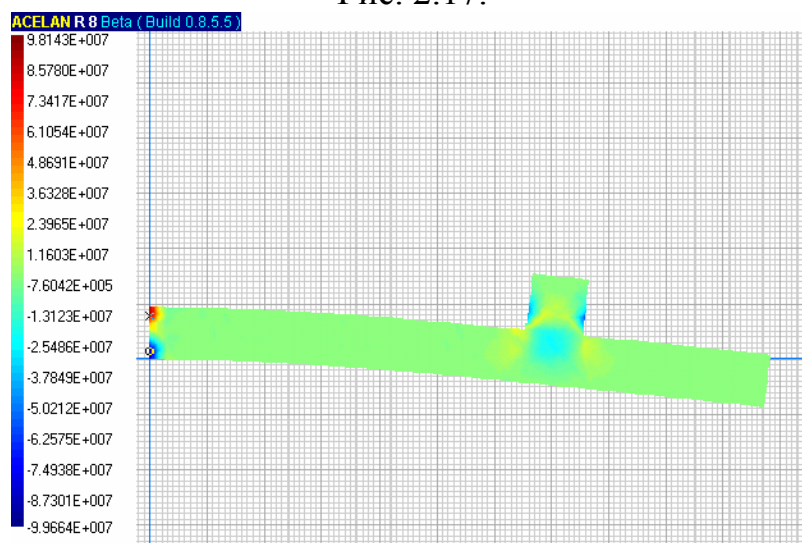


Рис. 2.18.

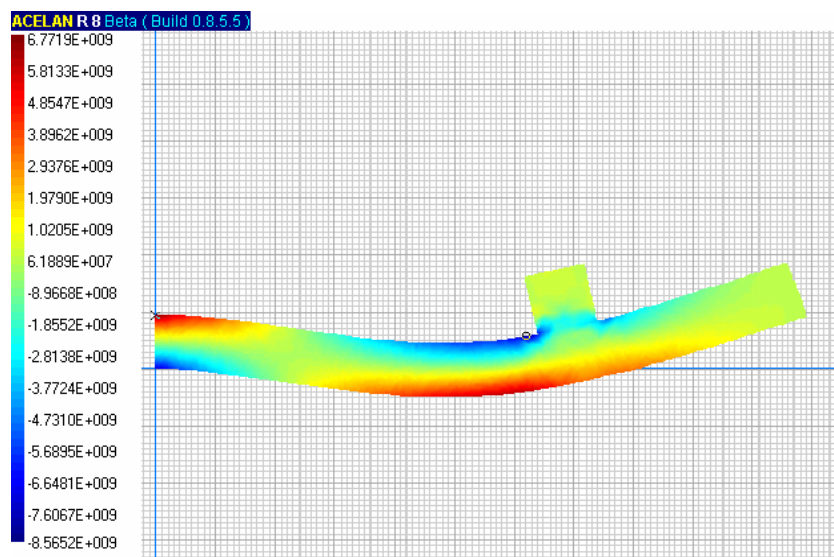


Рис. 2.19.

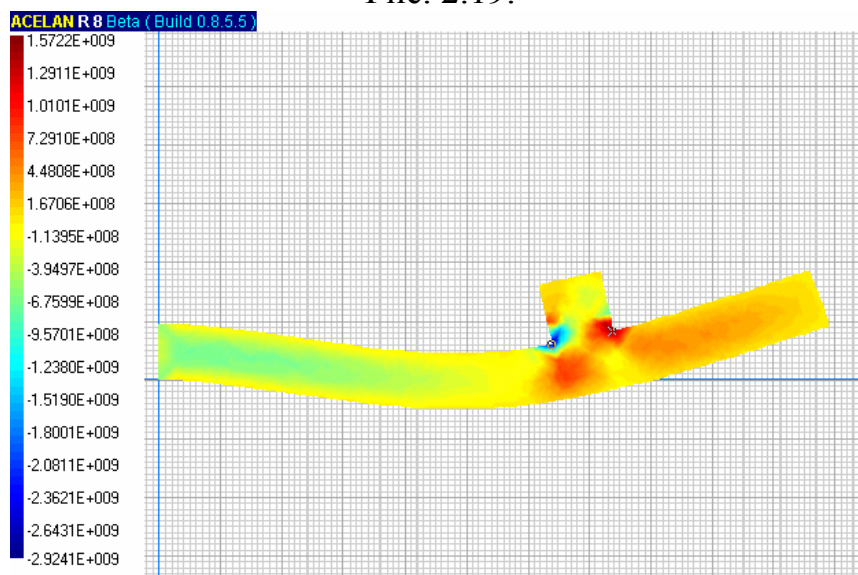


Рис. 2.20.

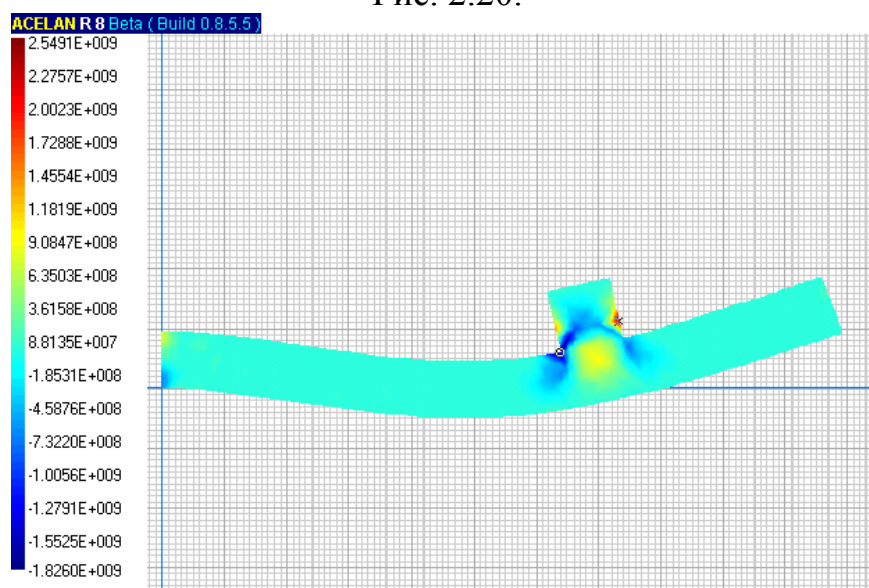


Рис. 2.21.

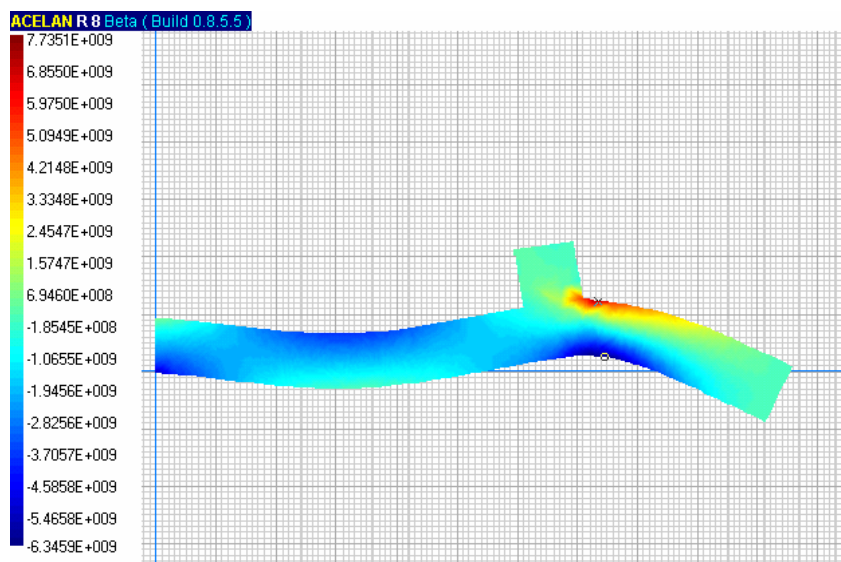


Рис. 2.22.

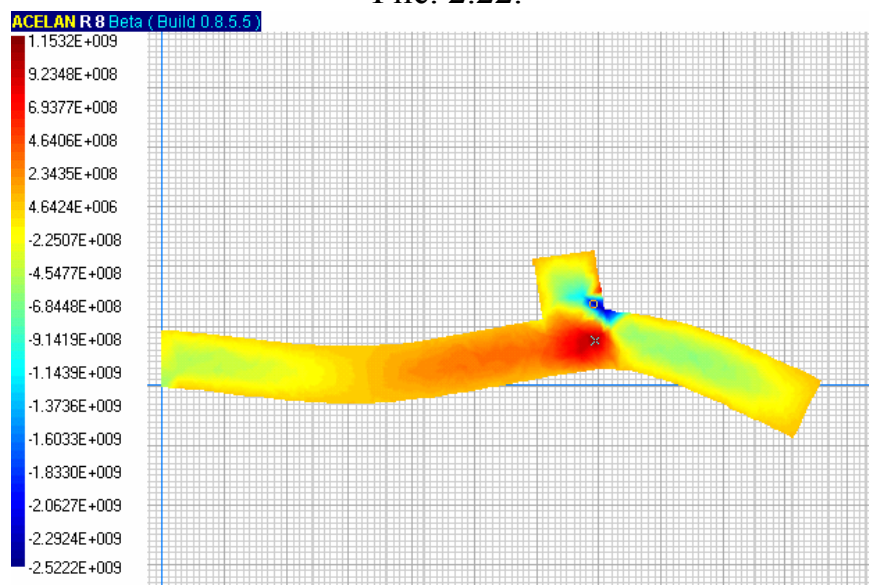


Рис. 2.23.



Рис. 2.24.

На рис. 2.16, 2.17, 2.18 – представлены распределения нормальных горизонтальных, касательных и нормальных вертикальных напряжений вблизи первого резонанса, на рис. 2.19, 2.20, 2.21 и на рис. 2.22, 2.23, 2.24 аналогичные результаты для второго и третьего резонанса.

Если масса прикрепленного тела составляет 100 кг то первые три собственные частоты соответственно равны

$$f_1 = 27,8; f_2 = 191,2; f_3 = 430,0 \text{ (Гц)}$$

Нестационарный анализ

Вначале отметим, что статический прогиб нагруженной балки определяется рис. 2.25, на котором изображены продольные нормальные напряжения в деформированном состоянии (максимальный прогиб равен – $5,4 \cdot 10^{-4}$ м). Максимальные растягивающие напряжения возникают в верхних слоях и равны $1,8 \cdot 10^6$ Н/м².

Рассматривается кинематическое возмущение в заделке такое, что вертикальное смещение меняется по гармоническому закону с линейно убывающей амплитудой

$$u_y(0, y, t) = A(at + b) \cos(2\pi f t + \varphi) \quad \text{при } t \in [0, t_0] \quad (14)$$

$$u_y(0, y, t) = 0 \quad \text{при } t \in [t_0, \infty]$$

В расчетах было принято

$$A = 0,01 \text{ м}, a = -10, b = 1, f = 20 \text{ Гц}, \varphi = \pi/2, t_0 = 0,1 \text{ с.}$$

Это смещение представлено на рис. 2.26. На рис. 2.27 представлен закон вертикальных колебаний свободного конца балки. При этом максимальные растягивающие напряжения возникают в верхних слоях вблизи заделки и равны $9,1 \cdot 10^7$ Н/м² (соответствуют амплитуде прогиба $3,45 \cdot 10^{-2}$ м).

Обсудим полученные результаты с учетом взглядов современных авторов на процесс трещинообразования и разрушения бетона.

Так авторами [4, 5] рассматриваются особенности структуры и процесс разрушения бетона под действием одноосной сжимающей нагрузки, протекающий в четыре стадии. На 1-й стадии в бетоне возникают внутренние напряжения без образования трещин, то есть бетон ведет себя как упругое тело. Эта стадия продолжается до нагрузки, составляющей \square 30% от разрушающей нагрузки. На 2-й стадии (30%-50% от разрушающей нагрузки) образуются трещины в соединительном слое между цементным камнем и зернами грубого заполнителя. На 3-й стадии (до 75% от разрушающей нагрузки) возникшие на предыдущей стадии трещины расширяются, и происходит образование трещин непосредственно в цементном камне. На последней 4-й стадии (>75% от разрушающей нагрузки) отдельные трещины смыкаются, образуя систему трещин, и начинается разрушение бетона.

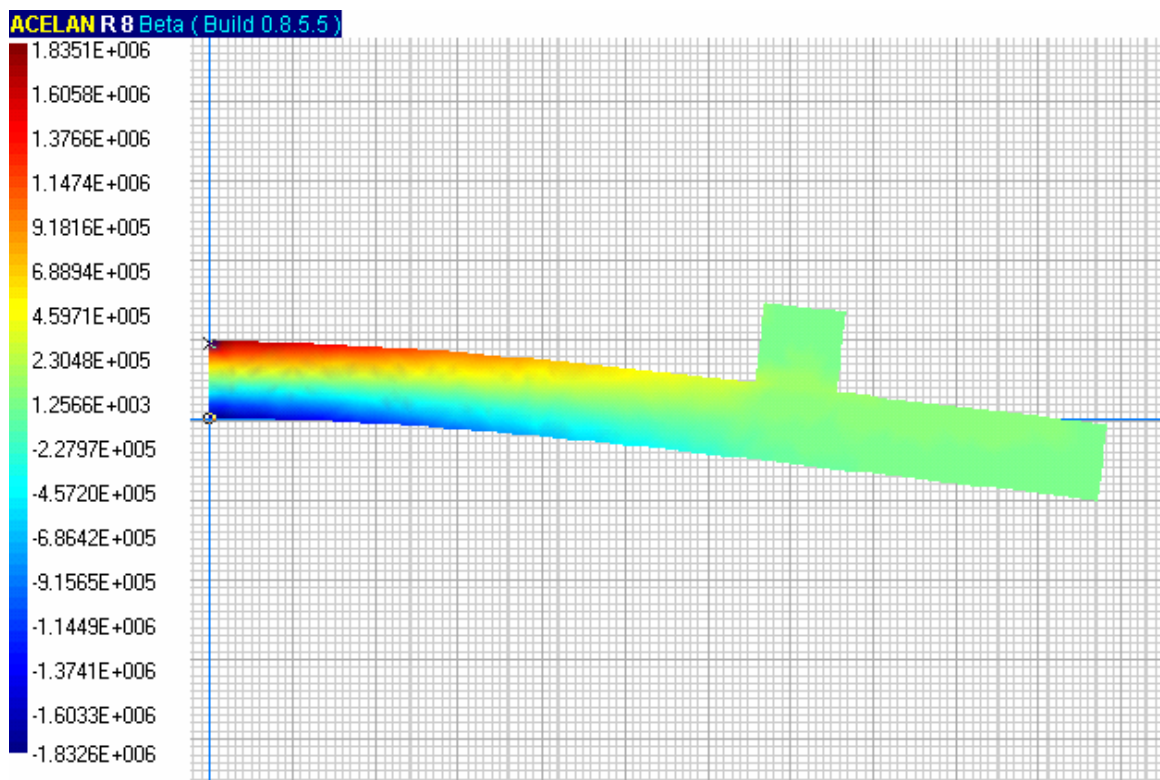


Рис.2.25. Продольные нормальные напряжения в балке, статически нагруженной присоединенной массой 100 кг

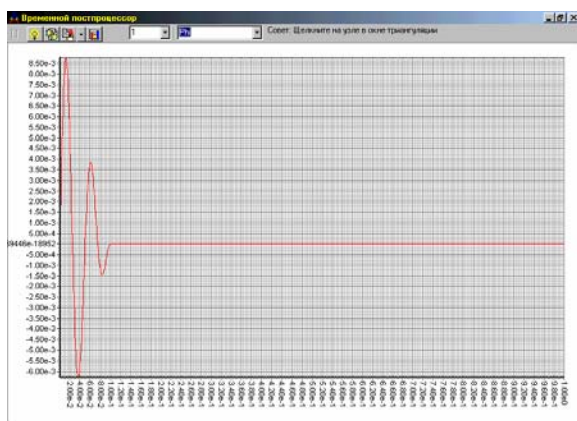


Рис. 2.26. Кинематическое возбуждение вертикальным смещением заделки модели балконной плиты

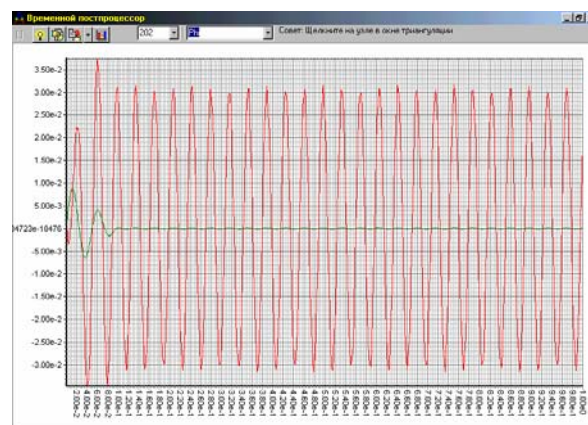


Рис.2.27. Вертикальные колебания свободного конца балки модели балконной плиты, возбужденные смещением заделки согласно рис.2.26

По данным [6] бетон при сжатии может разрушаться по одному из трех механизмов: вследствие раскалывания заполнителей, от нарушения сцепления цементного камня или раствора с крупным заполнителем или от разрушения самого цементного камня. Все три механизма разрушения могут работать в бетоне одновременно. На основе теоретических и экспериментальных исследований получена зависимость прочности при сжатии бетона (R_{co}) от прочности заполнителя при раскалывании (R_{sp}), средней прочности сцепления цементного камня с заполнителем (R_{bo}) и прочностью цементного камня или раствора на растяжение (R_p). Эта зависимость для образцов бетона размером 10x10x10 см имеет вид: $R_{co} = 0,4R_{sp} + 14,32R_{bo} + 2,02R_p - 32$.

Согласно данным [5] зависимость между напряжениями и деформациями в бетоне имеет вид нескольких отрезков прямых. Точки перелома характеризуют резкий рост деформаций. Сделана попытка связать точки перелома с развитием микротрещин. Эксперименты показали, что первая и вторая точки перелома в бетоне, растворе и цементном камне происходят при одинаковых относительных деформациях ($8,8 \cdot 10^{-4}$) и, следовательно, связаны с микротрещинами в цементном камне. С ростом нагрузки волосяные трещины в цементном камне растут до одной величины и останавливаются, начинают расти другие трещины. При дальнейшем росте деформаций увеличиваются трещины типа пор, что и вызывает появление первой точки перелома. Вторая точка перелома связана с ростом продольных протяженных трещин, образующихся при раскалывании цементного камня. Диаметр трещин не превышает 0,09 мм до достижения второй точки перелома, после которой они начинают внезапно расти и раскалывать цементный камень. Вблизи устья трещин раскалывания имеются трещины типа пор размером 0,16-0,19 мм, а на расстоянии уже 1 мм от устья трещины имеют размер $< 0,09$ мм, что подтверждает предлагаемый механизм разрушения.

Приводимые в [7] количественные данные по прочности используемых в гражданском строительстве бетонов, подвергнутых действию влаги и комбинированному статическому и знакопеременному нагружению, показывают, что определенные расчетным путем напряжения в натурной модели балконной плиты являются опасными, соответствующими зарождению микротрещин в цементном камне. При большей статической нагрузке и наличии концентрации напряжений, вызванной частичным повреждением плиты у заделки, рассчитанное напряженно-деформированное состояние может способствовать активации механизма роста и распространения трещин в бетонной матрице, снижая до опасных значений прочностные характеристики железобетонной конструкции в целом.